入試問題に挑戦!!

中学3年生の皆さんへ
掲載している問題は、東京都立高校の一次・分割前期試験と都内私立高校の入試問題です。入試本番までには解けるようになることを目標に、努力していきましょう。
編集部より

都立高校 ◆ 数学（一次·分割前期）

2 Ｓさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

aを正の数，nを自然数とする。

右の図１のように，１辺の長さが$2a$ cmの正方形に，各辺の中点を結んでできた四角形を描いたタイルがある。正方形と描いた四角形で囲まれてできる，■で示された部分の面積について考える。

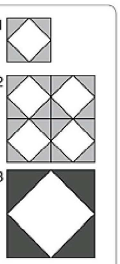
図１のタイルが縦と横にn枚ずつ正方形になるように，このタイルを並べて敷き詰める。右の図２は，$n=2$の場合を表している。

図１のタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形で，■で示される部分の面積をＰcm²とする。

また，図１のタイルと同じ大きさのタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形と同じ大きさの正方形で，各辺の中点を結んでできる四角形を描いた別のタイルを考える。右の図３は，$n=2$の場合を表している。

図１と同様に，正方形と描いた四角形で囲まれてできる部分を■で示し，その面積をＱcm²とする。

$n=5$のとき，ＰとＱをそれぞれaを用いて表しなさい。

図１ 図２ 図３


〔問１〕 次の［①］と［②］に当てはまる式を，下のア～エのうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

［先生が示した問題］で，$n=5$のとき，ＰとＱをそれぞれaを用いて表すと，Ｐ＝［①］，Ｑ＝［②］となる。

［①］ ア $\frac{25}{2}a^2$　イ $50a^2$　ウ $75a^2$　エ $100a^2$

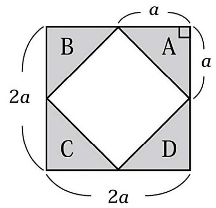
［②］ ア $\frac{25}{2}a^2$　イ $25a^2$　ウ $50a^2$　エ $75a^2$

【考え方】

$n=2$の場合から規則性をつかみ、$n=5$の場合を考えれば良い。
ポイントは基本の図形(図1)の面積とそれが何個あるかを把握すること。

【①の解き方】

図1で色を塗られた部分の面積を求める。右図のようにA～Dに分けたとき、Aは各辺の中点を結んだ三角形であるため、半径aの直角二等辺三角形である。よって面積は$\frac{1}{2}a^2$と求めることができる。A～Dは同じ面積であるため、$n=1$のときの色を塗られた部分の面積は$\frac{1}{2}a^2\times4=2a^2$である。なお、正方形全体の面積は$2a\times2a=4a^2$であることから、色を塗られた部分の面積は正方形全体の面積の半分であることがわかる。



次に、$n=2$の場合を考える。問題文より「図1のタイルが縦と横にn枚ずつ正方形になるように、このタイルを並べて敷き詰める」とあるため、図1の正方形が$2^2=4$個あるとわかる。つまり、色を塗られた部分の面積は$n=1$のときの面積を4倍すれば良い。以上から$n=5$のときは図1の正方形が$5^2=25$個あるため、$P=2a^2\times25=50a^2$と求めることができる。

【②の解き方】

$n=2$の場合を考える。図3の正方形の1辺の長さは図2の正方形の1辺の長さと等しい。色を塗られた部分は図1と同じように塗られている。①を解く過程で、色を塗られた部分の面積は正方形全体の面積の半分であるとわかっている。以上から、$n=5$のときは1辺が$2a\times5=10a$の正方形であり、色を塗られた部分の面積は$Q=10a\times10a\div2=50a^2$と求めることができる。

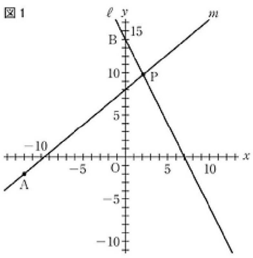
---

3 右の図１で，点Ｏは原点，点Ａの座標は$(-12,\ -2)$であり，直線ℓは一次関数$y=-2x+14$のグラフを表している。

直線ℓとy軸との交点をＢとする。

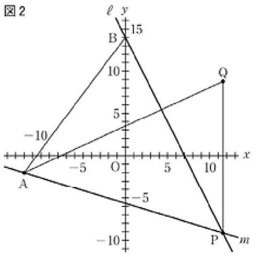
直線ℓ上にある点をＰとし，２点Ａ，Ｐを通る直線をmとする。

次の各問に答えよ。

図１


〔問３〕 右の図２は，図１において，点Ｐのx座標が７より大きい数であるとき，x軸を対称（たいしょう）の軸として点Ｐと線対称な点をＱとし，点Ａと点Ｂ，点Ａと点Ｑ，点Ｐと点Ｑをそれぞれ結んだ場合を表している。

△ＡＰＢの面積と△ＡＰＱの面積が等しくなるとき，点Ｐのx座標を求めよ。

図２


【考え方】

△APBの面積と△APQの面積が等しいことから、辺APを底辺としたときの高さが等しい(等積変形)と考える。つまり、点B,点Qを通る直線をnとするとき、直線nと直線mが平行(傾きが等しい)という条件から点Pのx座標を求めることができる。

【解き方】

点Pのx座標をtとおくと、点Pは直線ℓを通ることから点Pの座標は$P(t,\ -2t+14)$と表せる。点Qは点Pとx軸対称であるため、点Qの座標は$Q(t,\ 2t-14)$と表せる。△APBと△APQの面積が等しくなるためには、

直線nの傾き $\frac{(2t-14)-14}{t-0}=\frac{2t-28}{t}$ と、

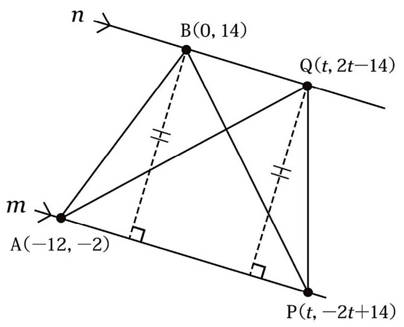
直線mの傾き $\frac{(-2t+14)-(-2)}{t-(-12)}=\frac{-2t+16}{t+12}$

が等しければ良い。したがって、

$$\frac{2t-28}{t}=\frac{-2t+16}{t+12}$$
$$\frac{t-14}{t}=\frac{-t+8}{t+12}$$

$(t-14)(t+12)=-t^2+8t$
$t^2-2t-168=-t^2+8t$
$2t^2-10t-168=0$
$t^2-5t-84=0$
$(t-12)(t+7)=0$
$t>7$より$t=12$

以上から、点Pのx座標は12



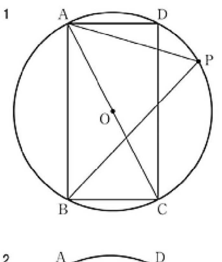
---

4 右の図１で，四角形ＡＢＣＤは，ＡＢ＞ＡＤの長方形であり，点Ｏは線分ＡＣを直径とする円の中心である。

点Ｐは，頂点Ａを含（ふく）まない$\overset{\frown}{CD}$上にある点で，頂点Ｃ，頂点Ｄのいずれにも一致（いっち）しない。

頂点Ａと点Ｐ，頂点Ｂと点Ｐをそれぞれ結ぶ。

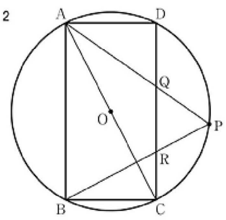
次の各問に答えよ。

図１


〔問２〕 右の図２は，図１において，辺ＣＤと線分ＡＰとの交点をＱ，辺ＣＤと線分ＢＰとの交点をＲとし，ＡＢ＝ＡＰの場合を表している。

次の①，②に答えよ。

① △ＱＲＰは二等辺三角形であることを証明せよ。

図２


【考え方】

三角形で「2辺の長さが等しい」か「2つの角が等しい」とき、その三角形は二等辺三角形であるといえる。どちらの条件を見つける方が最短になるかを考えながら図を見てほしい。結論から言うと、この問題では等しい2つの角を求める。AB=APの二等辺三角形ABPと△QRPでは、∠Pが共通している。そこからヒントを得て角に注目すると、辺ABと辺DCが平行で同位角を見つけることができた。

【解き方】

仮定よりAB=APであるため、△ABPは二等辺三角形である。二等辺三角形の底角は等しいため、∠ABP=∠APB
△QRPの角を使って表すと、∠ABP=∠QPR…①
また、四角形ABCDは長方形であることからAB//DCといえる。平行線の同位角は等しいため、∠ABP=∠QRP…②
①②より∠QPR=∠QRP
以上から、△QRPにおいて２つの角が等しいから、△QRPは二等辺三角形である。